Relación de Ejercicios: Límite funcional y continuidad

1. Calcular la imagen de la función $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$, definida por
$$f(x) = x\ (1-x^2)^{-1/2}, \forall x \in]-1,1[.$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(0) = 0$. Probar que f es continua en $\mathbb{R}$, estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Calcular la imagen de f.

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}} & ,\text{si } x \neq 0 \\ 0 & ,\text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & ,\text{si } x < 0 \\ x & ,\text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & ,\text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
Estudiar la continuidad de f y g en todo punto de $\mathbb{R}$ y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y $-\infty$.

4. Sea $f:]0,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por:
$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)},\ \forall x \in]0,1[.$$
Probar que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ y que $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$. Deducir que la imagen es todo $\mathbb{R}$.

5. Demostrar que la función $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ es biyectiva. Determinar f^{-1} y comprobar que es una función continua.

6. Probar que existe un número real positivo x tal que
$$\ln x + \sqrt{x} = 0.$$

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:
$$f(x) = \operatorname{sen}(x)\ \operatorname{sen}(\frac{1}{x}),\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(0) = 0.$$
Estudiar la continuidad de f y la existencia de límites en $+\infty$ y $-\infty$.

8. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por:
$$f(x) = x^\alpha\ \operatorname{sen}\frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(0) = 0.$$
Estudiar la continuidad de f según los valores de α.

9. Sean $a,\ b$ dos números reales verificando $b < 0 < a$; estudiar el comportamiento en cero de las funciones $f,\ g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \text{arctg}\frac{a}{x} - \text{arctg}\frac{b}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,$$

$$g(x) = x\ f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

10. Determinar la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \text{arctg}(\ln |x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

11. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \text{arctg}\frac{1+x}{1-x},\ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$. Calcular la imagen de f.

12. Probar que la ecuación:

$$x + e^x + \text{arctg}\ x = 0$$

tiene una sola raíz real. Dar un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

13. Probar que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.

14. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua en $[0,1]$. Probar que f tiene un punto fijo, es decir, existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

15. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del ecuador, pruébese que, en cualquier instante, existen dos puntos antípodas sobre el ecuador que se hallan a la misma temperatura.

16. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Probar que existe un intervalo de 5 minutos seguidos a lo largo del cual el corredor recorre exactamente 1 kilómetro.

17. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del sábado.